



TUGAS AKHIR - SM141501

**SIMULASI NUMERIK ALIRAN FLUIDA PADA
PERMUKAAN PEREGANGAN DENGAN
KONDISI BATAS KONVEKSI DI TITIK-
STAGNASI**

**AHLAN HAMAMI
NRP 1212 100 085**

**Dosen Pembimbing
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.**

**JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016**



FINAL PROJECT - SM141501

**NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW
ON THE STRETCHING SURFACE WITH
CONVECTIVE BOUNDARY CONDITION IN A
STAGNATION-POINT**

AHLAN HAMAMI

NRP 1212 100 085

Supervisors

Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Faculty of Mathematics and Science

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

**SIMULASI NUMERIK ALIRAN FLUIDA PADA
PERMUKAAN PEREGANGAN DENGAN KONDISI
BATAS KONVEKSI DI TITIK-STAGNASI**


**NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW ON THE
STRETCHING SURFACE WITH CONVECTIVE
BOUNDARY CONDITION IN A STAGNATION-POINT**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

AHLAN HAMAMI
NRP. 1212 100 085

Menyetujui,
Dosen Pembimbing


Dr. Chatrul Imron, M.I.Komp
NIP. 19611115 198703 1 003



Dr. Imam Mukhlash, S.Si. MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, Juli 2016

SIMULASI NUMERIK ALIRAN FLUIDA PADA PERMUKAAN PEREGANGAN DENGAN KONDISI BATAS KONVEKSI DI TITIK-STAGNASI

Nama : Ahlan Hamami
NRP : 1212 100 085
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

ABSTRAK

Simulasi numerik aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik-stagnasi dibahas dalam Tugas Akhir ini. Persamaan pembangun yang diperoleh dalam bentuk persamaan *dimensional*, ditransformasikan menjadi persamaan similaritas menggunakan variabel similaritas dan *stream function*. Persamaan similaritas yang berbentuk persamaan diferensial biasa (PDB) kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg. Berdasarkan simulasi numerik diperoleh bahwa pengaruh dari bilangan Prandtl dan parameter peregangan yang meningkat mengakibatkan menurunnya profil temperatur. Sebaliknya, semakin meningkatnya parameter konveksi mengakibatkan peningkatan juga pada profil temperatur.

Kata Kunci : Titik-Stagnasi, Kondisi Batas Konveksi, Metode Runge-Kutta-Fehlberg,

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW ON THE STRETCHING SURFACE WITH CONVECTIVE BOUNDARY CONDITION IN A STAGNATION-POINT

Nama : Ahlan Hamami
NRP : 1212 100 085
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

ABSTRACT

Numerical simulation of fluid flow on the stretching surface with convective boundary condition in a stagnation-point discussed in this Final Project. Governing equation obtained in the form of dimensional equation, the dimensional equations are transformed to similarity equations by applying similarity variables and stream function. Similarity equations in the form of ordinary differential equation are solved numerically by using Runge-Kutta-Fehlberg method. Based on the numerical results, the temperature profiles decrease when both stretching parameter and Prandtl number increase. Otherwise, the temperature profiles increase when the convection parameter increase.

Keywords : Stagnation-Point, *Convective Boundary Condition*,
Runge-Kutta-Fehlberg method

DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan	5
1.5 Manfaat.....	5
1.6 Sistematika Penulisan.....	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Sebelumnya	7
2.2 Fluida.....	8
2.2.1 Karakteristik Aliran Fluida.....	8
2.2.2 Viskositas	9
2.2.3 Rapat Jenis.....	10
2.2.4 Fungsi Alir.....	10
2.3 Bilangan Tak Berdimensi.....	11
2.3.1 Bilangan Prandtl.....	11
2.3.2 Bilangan Nusselt	11
2.3.3 Bilangan Reynolds	12
2.4 Konveksi Panas	13

2.4.1 Konveksi Bebas (<i>Free Convection</i>).....	13
2.4.2 Konveksi Paksa (<i>Forced Convection</i>)	13
2.4.3 Konveksi Campuran (<i>Mixed Convection</i>)	14
2.5 Metode Runge-Kutta	14
2.5.1 Metode Runge-Kutta-Fehlberg.....	15
BAB III METODE PENELITIAN	17
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Penurunan Persamaan Pembangun.....	19
4.2 Persamaan <i>Dimensional</i>	26
4.3 Persamaan Similaritas	26
4.4 Penyelesaian Numerik.....	27
4.5 Analisis Hasil Simulasi.....	32
4.5.1 Pengaruh Bilangan Prandtl (<i>Pr</i>).....	33
4.5.2 Pengaruh Parameter Peregangan ϵ	34
4.5.3 Pengaruh Parameter Konveksi γ	36
BAB V PENUTUP	39
5.1 Kesimpulan.....	39
5.2 Saran.....	41
DAFTAR PUSTAKA	43
LAMPIRAN	45
BIODATA PENULIS	63

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 1.1 Model fisik dan sistem koordinat Aliran Fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik-stagnasi	3
Gambar 2.1 Jenis-jenis aliran fluida: (a) Aliran Laminar, (b) Aliran Transisi, (c) Aliran Turbulen.....	8
Gambar 4.1 Profil Temperatur Variasi Bilangan Prandtl.....	34
Gambar 4.2 Profil Kecepatan Variasi Parameter Peregangan ...	35
Gambar 4.3 Profil Temperatur Variasi Parameter Peregangan..	36
Gambar 4.4 Profil Temperatur Variasi Parameter Konveksi	37

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
LAMPIRAN.....	41
Lampiran 1. Penjabaran Persamaan Pembangun.....	41
Lampiran 2. Penjabaran Persamaan Similaritas.....	44
Lampiran 3. Program Simulasi pada Matlab.....	49

DAFTAR SIMBOL

ρ	Densitas Fluida
a, b	Konstanta Positif
u	komponen Kecepatan Pada Sumbu x
v	komponen Kecepatan Pada Sumbu y
$u_w(x)$	Kecepatan Pada Permukaan Plat
$u_e(x)$	Kecepatan diluar
x, y	Koordinat Cartesian Sepanjang Permukaan
T	Suhu Fluida
T_f	Suhu Panas Fluida
T_∞	Suhu Ambient
η	Viskositas Fluida
μ	Viskositas Dinamik
ν	Viskositas Kinematik
γ	Parameter Konveksi
ε	Parameter Peregangan
Pr	Bilangan Prandtl
Nu_x	Bilangan Nusselt Local
Re_x	Bilangan Reynolds Local
τ_w	Dinding <i>shear stress</i>
ψ	Fungsi alir
θ	Temperatur tak berdimensi
f	Fungsi Alir tak berdimensi
α	Diffusivitas panas
h_f	Koefisien Perpindahan Panas
K	Konduktivitas panas

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatar belakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir ini diuraikan dibagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Perpindahan panas (*Heat Transfer*) adalah ilmu untuk memprediksi perpindahan energi yang terjadi akibat perbedaan suhu pada benda atau meterial. Proses perpindahan panas dapat terjadi melalui tiga cara, yaitu perpindahan panas secara konduksi, konveksi, dan radiasi.

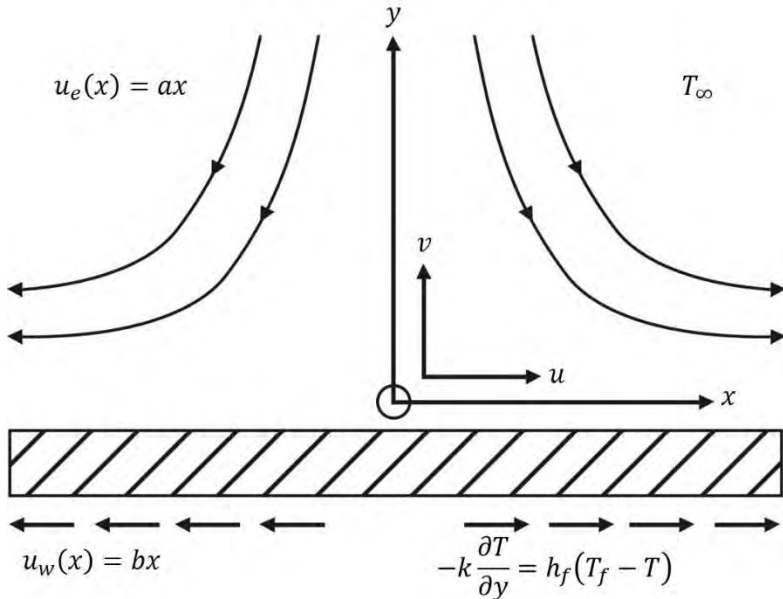
Konveksi merupakan perpindahan panas secara konvektif dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Pada umumnya bentuk konveksi dibagi menjadi dua, yakni konveksi bebas (*free convection*) dan konveksi paksa (*forced convection*). Konveksi bebas disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis, sesuai dengan variasi suhu fluida. Sedangkan konveksi paksa terjadi pada saat fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal maupun internal. Sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan benda padat atau dengan kata lain fluida mengalir di atas permukaan bidang. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda padat, misalnya mengalir melalui pipa [9].

Abdul Azis dkk, melakukan penelitian Lapisan batas laminar di atas plat datar dengan permukaan kondisi batas yang konveksi. Persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi diselesaikan secara numerik menggunakan Runge-Kutta-Fehlberg. Sehingga, diketahui bahwa untuk solusi persamaan energi dengan kondisi batas, suhu permukaan yang konstan dan fluks panas yang konstan. Dengan menghasilkan analisis solusi perpindahan panas secara konveksi yang terkait dengan panas fluida pada permukaan plat untuk $x^{-1/2}$. Bilangan prandtl yang digunakan 0.1, 0.72, dan 10 untuk persamaan energi sehingga dihasilkan nilai parameter proses konveksi untuk panas fluida [2].

M.Z. Salleh dkk, melakukan penelitian Aliran lapisan batas yang stabil dan perpindahan panas pada permukaan peregangan dengan *Newtonian Heating*. Dimana perpindahan panas dari permukaan sebanding dengan suhu ruang permukaan. Perubahan bentuk dari persamaan nonlinier lapisan batas yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi diselesaikan secara numerik menggunakan Metode Keller Box dan Metode Beda Hingga Skema Implisit. Solusi numerik yang diperoleh untuk perpindahan panas dari permukaan peregangan dan suhu dinding menggunakan bilangan Prandtl. Hal terpenting dalam penelitian ini adalah variasi dari suhu permukaan dan fluks panas dari permukaan peregangan dengan parameter konjugat dan bilangan Prandtl, sehingga berdampak pada karakteristik perpindahan panas [16].

Penelitian mengenai pengaruh konveksi campuran banyak diteliti pada fluida Newtonian maupun fluida non-Newtonian. Untuk fluida Newtonian, hal ini disebabkan fluida Newtonian merupakan fluida yang mempunyai hubungan linier antara besarnya tegangan geser yang diterapkan dan laju perubahan bentuk yang diakibatkan. Sedangkan pada fluida non-Newtonian, fluida ini tidak akan terus mengalir ketika terdapat gaya yang

bekerja pada fluida yang disebabkan ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida non-Newtonian maka viskositas fluida ini akan berubah. Pada penelitian ini menggunakan jenis fluida Newtonian yaitu fluida kental (*viscous fluid*).



Gambar 1.1 Model fisik dan sistem koordinat Aliran Fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik-stagnasi

Pada Tugas Akhir ini, dilakukan penelitian mengenai masalah aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas yang konveksi di titik stagnasi. Model fisik dan sistem koordinat dapat dilihat pada Gambar 1.1 Persamaan pembangun yang berbentuk *dimensional* di bawa ke bentuk persamaan diferensial biasa (PDB) menggunakan *Stream Function*. Selanjutnya diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang diselesaikan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi dengan metode Runge-Kutta-Fehlberg?
3. Bagaimana hasil dan analisis simulasi model matematika dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi dengan variasi parameter bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ) terhadap profil temperatur?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Fluida bersifat *incompressible*, dan *steady*
2. Fluida yang digunakan adalah fluida *viscous*.
3. Aliran fluida bersifat laminar.
4. Diberikan asumsi flux panas konstan.
5. Menggunakan persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi untuk menyelesaikan permasalahan fluida.
6. Menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg untuk menyelesaikan persamaan secara numerik.
7. Menggunakan *software* MATLAB untuk simulasi permasalahan pada Tugas Akhir ini.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui model matematika dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi.
2. Mengetahui penyelesaian model matematika dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi dengan metode Runge-kutta-felhberg.
3. Mengetahui hasil dan analisis simulasi model matematika dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi dengan variasi dengan variasi parameter bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ) terhadap profil Temperatur.

1.5 Manfaat

Manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan di bidang fluida. Diperoleh pengetahuan dan keilmuan tentang pembahasan dan analisis hasil simulasi dengan variasi dengan variasi parameter bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ) di aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas yang konveksi di titik stagnasi.
2. Sebagai literatur penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir ini, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Dasar teori yang dijelaskan dibagi menjadi beberapa subbab yaitu Penelitian Sebelumnya, Fluida, Fungsi Similaritas, Bilangan Tak Berdimensi dan Metode Runge Kutta.

BAB III METODOLOGI

Bab ini menjelaskan tahap-tahap yang dilakukan dalam penyelesaian Tugas Akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas secara detail mengenai transformasi dari persamaan *dimensional* ke persamaan differensial biasa menggunakan persamaan similaritas. Persamaan tersebut selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan MATLAB untuk mengetahui gambaran karakteristik dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi.

BAB V PENUTUP

Bab ini merupakan penutup, berisi tentang kesimpulan yang diperoleh dari penyelesaian permasalahan pada bab sebelumnya dan saran yang diberikan bila Tugas Akhir ini dilanjutkan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Dasar teori yang dijelaskan dibagi menjadi beberapa subbab yaitu Penelitian Sebelumnya, Fluida, Fungsi Similaritas, Bilangan Tak Berdimensi, dan Metode Runge Kutta.

2.1 Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya digunakan sebagai referensi dan validasi dalam Tugas Akhir ini.

2.1.1 Penelitian Abdul Azis

Lapisan batas laminar di atas plat datar dengan permukaan kondisi batas yang konveksi. Persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi diselesaikan secara numerik menggunakan Runge-Kutta-Fehlberg. Sehingga, diketahui bahwa untuk solusi persamaan energi dengan kondisi batas, suhu permukaan yang konstan dan fluks panas yang konstan. Dengan menghasilkan analisis solusi perpindahan panas secara konveksi yang terkait dengan panas fluida pada permukaan plat untuk $x^{-1/2}$. Bilangan Prandtl yang digunakan 0.1, 0.72, dan 10 untuk persamaan energi sehingga dihasilkan nilai parameter proses konveksi untuk panas fluida.

2.1.2 Penelitian M. Z. Salleh

Aliran lapisan batas yang stabil dan perpindahan panas pada permukaan peregangan dengan *Newtonian Heating*. Dimana perpindahan panas dari permukaan sebanding dengan suhu ruang permukaan. Perubahan bentuk dari persamaan nonlinier lapisan

batas yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi diselesaikan secara numerik menggunakan Metode Keller Box dan Metode Beda Hingga Skema Implisit. Solusi numerik yang diperoleh untuk perpindahan panas dari permukaan peregangan dan suhu dinding menggunakan bilangan Prandtl. Hal terpenting dalam penelitian ini adalah variasi dari suhu permukaan dan fluks panas dari permukaan peregangan dengan parameter konjugat dan bilangan Prandtl, sehingga berdampak pada karakteristik perpindahan panas.

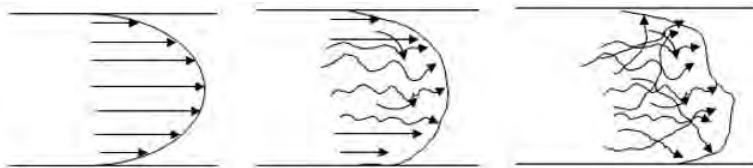
2.2 Fluida

Dalam ilmu fluida terdapat terdapat bermacam-macam faktor yang mempengaruhi sistem kerja fluida. Selain itu, penentuan ciri-ciri fluida juga menjadi hal yang perlu diperhatikan agar memperoleh hasil penelitian yang diinginkan.

2.2.1 Karakteristik Aliran Fluida

Aliran fluida dapat dikategorikan menjadi tiga jenis aliran yaitu:

1. Aliran laminar, turbulen dan transisi



Gambar 2.1 Jenis-jenis aliran fluida: (a) Aliran Laminar, (b) Aliran Transisi, (c) Aliran Turbulen [19].

Aliran laminar adalah aliran yang bergerak dalam lapisan-lapisan secara lancar dengan kecepatan yang sama, sehingga tidak terjadi fluktuasi atau ketidakberaturan gerak antara lapisan satu

dengan yang lainnya, tetapi saling tukar menukar momentum secara *molecular* saja.

Aliran turbulen yaitu aliran yang bergerak secara tidak teratur karena mengalami percampuran serta percampuran serta perputaran partikel pada lapisan-lapisan, sehingga menyebabkan saling tukar momentum dari lapisan satu dengan yang lain dalam jumlah besar.

Aliran transisi merupakan aliran peralihan dari aliran laminar ke aliran turbulen. Antara aliran laminar, turbulen dari transisi dapat diidentifikasi menggunakan bilangan Reynolds.

2. Aliran *incompressible* dan *compressible*

Aliran *incompressible* atau aliran tak termampatkan yaitu aliran dimana rapat massa fluidanya tidak berubah karena pengaruh tekanan dan temperatur. Sedangkan aliran *compressible* atau aliran termampatkan yaitu aliran dimana rapat massa fluidanya bisa berubah karena pengaruh tekanan dan suhu.

3. Aliran *steady* dan *unsteady*

Aliran *steady* (tunak atau permanen) yaitu suatu aliran dimana komponen aliran (kecepatan, tekanan, kerapatan dan debit fluida) tidak berubah terhadap waktu. Sehingga, walaupun terjadi perubahan terhadap komponen tersebut, akan tetapi tetap konstan terhadap waktu. Sedangkan *unsteady* (tak tunak atau tak permanen) yaitu komponen aliran dapat berubah terhadap waktu.

2.2.2 Viskositas

Viskositas fluida merupakan ukuran ketahanan sebuah fluida terhadap deformasi atau perubahan bentuk. Viskositas dipengaruhi oleh temperatur, tekanan, kohesi dan laju perpindahan momentum molekularnya. Viskositas zat cair dan zat gas berbeda, saat viskositas gas meningkat terhadap suhu terhadap suhu tetapi viskositas cairan berkurang dengan meningkatnya suhu. Selain itu,

jika dilihat dari pengaruh kohesi dimana cairan dengan molekul-molekul yang lebih rapat daripada gas maka cairan akan mempunyai gaya-gaya kohesi yang lebih besar daripada gas. Dengan demikian, saat kohesi pada fluida berkurang, sebagian besar tahananannya juga akan berubah terhadap tegangan geser karena perpindahan momentum molekular.

2.2.3 Rapat jenis

Density atau rapat jenis suatu zat adalah ukuran untuk kosentrasi zat tersebut dan dinyatakan dalam massa persatuan volume.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

dengan :

m = massa

V = volume

Rapat jenis suatu zat dapat dipengaruhi suhu dan tekanan. Pada sebagian besar gas, rapat jenisnya setara dengan suhu dan berkebalikan dengan tekanan. Pada zat cair semakin tinggi suhu zat cair maka semakin tinggi volume zat cair. Maka, rapat jenis berkurang.

2.2.4 Fungsi Alir

Fungsi Alir (*Stream Function*) (ψ) adalah sebuah fungsi yang diciptakan untuk memudahkan dalam hal analisis, yang mana apabila fungsi tadi diturunkan terhadap suatu sumbu, maka akan didapati kecepatan yang ada pada sumbu yang berbeda. Dan arah dari fungsi arus selalu tegak lurus dengan kecepatan potensial.

2.3 Bilangan Tak Berdimensi

Dalam menghitung perpindahan panas secara konveksi dibutuhkan persamaan-persamaan yang tidak berdimensi, antara lain sebagai berikut:

2.3.1 Bilangan Prandtl

Bilangan Prandtl adalah bilangan tak berdimensi yang merupakan perbandingan antara viskositas kinematik dan diffusitas termal [15]. Bilangan Prandtl berpengaruh pada hubungan antara distribusi suhu dan distribusi kecepatan. bilangan Prandtl dinyatakan dengan persamaan :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.2)$$

dengan :

ν = Viskositas kinematik

α = Diffusitas termal

2.3.2 Bilangan Nusselt

Bilangan Nusselt adalah rasio pindah panas konveksi dan konduksi normal terhadap batas. Dalam kasus perpindahan panas pada permukaan fluida, bilangan Nusselt adalah satuan tak berdimensi yang dinamai menggunakan nama Wilhelm Nusselt [15]. Komponen konduktif diukur di bawah kondisi yang sama dengan konveksi dengan kondisi fluida stagnan atau tidak bergerak. Aliran panas konduksi dan konveksi sifatnya sejajar satu sama lainnya dan terhadap permukaan normal terhadap bidang batas, sehingga persamaan Bilangan Nusselt

$$Nu_L = \frac{hL}{k} \quad (2.3)$$

dengan:

L = panjang karakteristik

k = konduktivitas termal fluida

h = koefisien pindah panas konvektif

Pemilihan panjang karakteristik harus searah dengan ketebalan dari lapisan batas. Contoh dari panjang karakteristik misalnya diameter terluar dari silinder pada aliran yang mengalir di luar silinder, tegak lurus terhadap aksis silinder. Selain itu, panjang papan vertikal terhadap konveksi alami yang bergerak ke atas dan diameter bola yang berada di dalam aliran konveksi juga merupakan panjang karakteristik. Untuk bangun yang lebih rumit, panjang karakteristik bisa dihitung dengan membagi volume terhadap luas permukaannya.

Untuk konveksi bebas, rataan bilangan Nusselt dinyatakan sebagai fungsi dari bilangan Rayleigh dan bilangan Prandtl. Dan untuk konveksi paksa, rataan bilangan Nusselt adalah fungsi dari bilangan Reynolds dan bilangan Prandtl. Hubungan empiris untuk berbagai geometri terkait konveksi menggunakan bilangan Nusselt didapatkan melalui eksperimen.

2.3.3 Bilangan Reynolds

Bilangan Reynolds merupakan bilangan tak berdimensi yang dapat membedakan suatu aliran itu dinamakan aliran laminar, transisi atau turbulen [20]. Sifat ini ditentukan dengan menghitung rasio antara gaya inersia terhadap gaya *viscous*. Hubungan ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$Re = \frac{ul\rho}{\mu} \quad (2.4)$$

dimana:

u adalah kecepatan rata-rata fluida yang mengalir (m/s)

l adalah panjang karakteristik (m)

ρ adalah massa jenis fluida (kg/m^3)

μ adalah viskositas ($kg/m.s$)

2.4 Konveksi Panas

Konveksi panas merupakan proses perpindahan energi dari permukaan ke fluida karena perbedaan temperatur antara permukaan dan fluida. Konveksi panas pada umumnya dibagi menjadi tiga jenis, yaitu:

2.4.1 Konveksi Bebas (*Free Convection*)

Konveksi bebas terjadi ketika sebuah benda ditempatkan dalam suatu fluida yang suhunya lebih tinggi atau lebih rendah daripada benda tersebut. Perbedaan suhu tersebut menyebabkan panas mengalir diantara fluida dan benda serta perubahan kerapatan (*density*) lapisan fluida di dekat permukaan. Perbedaan kerapatan menyebabkan fluida yang lebih berat mengalir ke bawah dan fluida yang lebih ringan mengalir ke atas. Gerakan fluida tersebut hanya disebabkan oleh perbedaan kerapatan, diakibatkan oleh gradien suhu. Dalam hal ini, suhu yang lebih tinggi menyebabkan kerapatan semakin kecil, sehingga fluida akan mengalir ke atas yang disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy force*), sedangkan suhu yang lebih kecil menyebabkan kerapatan semakin besar, sehingga fluida akan mengalir ke bawah yang disebabkan oleh gaya tarik gravitasi.

2.4.2 Konveksi Paksa (*Forced Convection*)

Konveksi paksa merupakan konveksi yang terjadi pada saat fluida dipaksa mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal ataupun internal, sedangkan gaya apung diabaikan. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda solid seperti mengalir pada sebuah pipa sedangkan sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar. Konveksi panas menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang dipengaruhi oleh gaya dari luar [9]. Konveksi paksa biasanya digunakan untuk meningkatkan laju perubahan panas.

2.4.3 Konveksi Campuran (*Mixed Convection*)

Pada perkembangan perpindahan panas konveksi, dikenal konveksi campuran yang merupakan kombinasi antara aliran konveksi alamiah dan paksa. Konveksi campuran terjadi dimana pengaruh aliran gaya pada konveksi bebas dan konveksi paksa menjadi signifikan. Contoh konveksi campuran dalam kehidupan sehari – hari seperti pada tabung gas yang disebabkan oleh faktor eksternal yang terjadi dan pada saat bersamaan dengan asap yang berasal dari api.

2.5 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta mencapai ketelitian suatu pendekatan deret *Taylor* tanpa memerlukan kalkulasi turunan yang lebih tinggi. Banyak perubahan terjadi, tetapi semuanya dapat ditampung dalam bentuk umum dari persamaan:

$$Y_{i+1} = y_1 + \varphi(t_1, y_1, h)h$$

dimana $\varphi(t_1, y_1, h)$ disebut suatu fungsi yang dapat diinterpretasikan sebagai sebuah *slope* rata-rata sepanjang interval. Fungsi tersebut dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

dimana setiap a adalah konstanta dan setiap k besarnya adalah:

$$k_1 = f(y(t), t)$$

$$k_2 = f(y(t) + q_{11}k_1h, t + p_1h)$$

$$k_3 = f(y(t) + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h, t + p_2h)$$

.

.

.

$$k_n = f(y(t) + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h, t + p_{n-1}h)$$

dengan:

$$f(y(t), t) = \frac{dy(t)}{dt} = y'(t)$$

Semua harga k berhubungan secara *rekursif*. Artinya k_1 muncul dalam persamaan untuk k_2 , yang muncul lagi dalam persamaan untuk k_3 , dan seterusnya. *Rekurensi* ini membuat metode RK efisien untuk kalkulasi oleh komputer.

2.5.1 Metode Runge-Kutta-Fehlberg

Metode Runge-Kutta Fehlberg yang didasarkan pada perhitungan dua metode RK dari orde yang berbeda, dengan mengurangi hasil-hasilnya untuk mendapatkan suatu taksiran kesalahan. Teknik tersebut terdiri dari suatu formula orde keempat dengan orde kelima:

$$f(w(t), t) = \frac{dw(t)}{dt} = w'(t) \quad \text{dimana } w(t_i) = w_i$$

$$w_{i+1} = w_i + \left(\frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right)$$

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right)$$

$$R = \frac{1}{h} |\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|$$

dengan:

$$k_1 = hf(t, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{1}{4}h, w_i + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t + \frac{3}{8}h, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= hf \left(t + \frac{12}{13}h, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3 \right) \\
k_5 &= hf \left(t + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4 \right) \\
k_6 &= hf \left(t + \frac{1}{2}h, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 + \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{11}{40}k_5 \right)
\end{aligned}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam penyelesaian Tugas Akhir. Metodologi penelitian yang digunakan ini, sebagai acuan sehingga penelitian ini dapat disusun secara sistematis.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mengumpulkan referensi yang terdapat teori-teori dasar yang mendukung pembahasan masalah. Selain itu, mempelajari penelitian-penelitian sebelumnya sebagai referensi pertimbangan ketika melakukan simulasi dan melakukan penarikan kesimpulan.

2. Transformasi Persamaan

Pada tahap ini dilakukan transformasi persamaan pembangun yaitu Persamaan Kontinuitas, Persamaan Momentum, dan Persamaan Energi dari persamaan berbentuk *dimensional* ke bentuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan menggunakan fungsi Similaritas dan variabel Similaritas yang sudah di definisikan.

3. Penyelesaian Numerik

Pada tahap ini persamaan pembangun yaitu persamaan Kontinuitas, persamaan Momentum, dan persamaan Energi untuk fluida *incompressible*, *steady*, dan *viscous* yang berbentuk persamaan diferensial biasa (PDB) diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg.

4. Simulasi

Pada tahap ini Penyelesaian numerik untuk aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi disimulasikan menggunakan *software* MATLAB dengan menggunakan numerik Runge-Kutta-Fehlberg, dengan variasi bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ).

5. Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini penulis melakukan analisis terhadap hasil simulasi yang dipengaruhi oleh parameter-parameter terhadap karakteristik fluida. Adapun parameter-paramater yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini adalah bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ).

6. Kesimpulan dan Saran

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas secara detail mengenai transformasi dari persamaan *dimensional* ke persamaan differensial biasa menggunakan persamaan similaritas. Persamaan tersebut selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan Runge-Kutta-Fehlberg. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan MATLAB untuk mengetahui gambaran karakteristik dari aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi.

4.1 Penurunan Persamaan Pembangun

Menurut [3] persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, momentum dan energi diberikan:

persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (4.1)$$

persamaan momentum:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \underline{F} \quad (4.2)$$

persamaan energi:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (4.3)$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}, \\ \underline{u} &= u \hat{i} + v \hat{j}, \\ \underline{F} &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sehingga,

persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.5)$$

persamaan momentum:

sumbu x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (4.6)$$

sumbu y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \quad (4.7)$$

persamaan energi:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.8)$$

untuk banyaknya fluida dan kondisi aliran fluida, cara yang sederhana untuk mengetahui selisih densitas $(\rho - \rho_\infty)$ dalam *buoyancy force*, persamaan momentum yang diberikan oleh [12]

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty)], \quad (4.9)$$

dimana $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ adalah koefisien termal, T_∞ adalah suhu *ambient* dan ρ_∞ adalah densitas fluida pada suhu *ambient* T_∞ . Persamaan (ρ_∞) baik digunakan untuk variasi densitas, terutama ketika $(T - T_\infty)$ bernilai kecil. Pendekatan ini dikenal sebagai pendekatan Boussinesq.

Dalam membahas model matematika aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi. Dan juga dalam Tugas Akhir ini, diasumsikan bahwa aliran *steady, 2-dimensional, incompressible* dan *viscous* dimana sifat-sifat fluida seperti *flux* panas, konduktivitas termal dan

viskositas bernilai konstan. Sehingga $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ dan ρ konstan maka Persamaan (4.5)-(4.8) menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_x \quad (4.11)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_y \quad (4.12)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.13)$$

dimana $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ adalah difusitas termal dan $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ adalah viskositas kinematik. Pada Tugas Akhir ini, dimana konveksi paksa yang berlaku, sehingga $F_x = F_y = 0$

Pada Persamaan (4.10)-(4.13) adalah Persamaan diferensial parsial non linier yang eliptikal. Persamaan ini dapat di transformasikan ke bentuk parabolik dengan menghilangkan turunan kedua dengan melihat x atau y . Persamaan diferensial partial parabolik untuk diselesaikan [18].

Untuk mengubah persamaan eliptik ke persamaan parabolik, salah satu turunan kedua harus dihilangkan dengan analisis dari ukuran[1]. Bentuk yang lebih kecil dibandingkan dengan yang lain pada persamaan yang sama akan dihilangkan juga [1]. Ini dikarenakan nilai kecil memberikan dampak yang kecil sehingga dapat diabaikan.

Berdasarkan pada asumsi aliran lapisan batas [3]. Didapat bahwa $x = O(L)$, $y = O(\delta)$, $T = O(T_\infty)$ dan $U = O(U_\infty)$. Dari Persamaan kontinuitas (4.10), analisis besaran untuk $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial y}$ didefinisikan masing-masing sebagai $\frac{U_\infty}{L}$ dan $\frac{v}{\delta}$. Karena $\frac{\partial u}{\partial x}$

berdorder sama dengan $\frac{\partial v}{\partial y}$ pada lapisan batas dan $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$,
Sehingga,

$$v = O\left(\frac{U_\infty \delta}{L}\right)$$

untuk komponen x pada Persamaan momentum (4.11) menjadi,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

sehingga besaran untuk masing-masing bentuk direpresentasikan, sebagai

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = O\left(U_\infty \frac{U_\infty}{L}\right), v \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{U_\infty \delta}{L} \frac{U_\infty}{\delta}\right), \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\rho U_\infty^2}{L}\right),$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\nu \frac{U_\infty}{L^2}\right) \text{ dan } \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\nu \frac{U_\infty}{\delta^2}\right)$$

dengan $p = O(\rho U_\infty^2)$ dari persamaan Bernoulli dimana tekanan pada lapisan batas sama dengan tekanan pada kondisi batas.

Persamaan di atas dikalikan dengan $\frac{L}{U_\infty^2}$, Sehingga didapat:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = O(1), v \frac{\partial u}{\partial y} = O(1), \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O(1),$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right) \text{ dan } \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{\nu}{U_\infty L} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right)$$

dua bentuk terakhir merepresentasikan viskositas, oleh karena itu salah satu persamaan akan dihilangkan karena ukurannya lebih kecil dibandingkan dengan yang lain. Perbandingannya dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} / \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 / 1$$

oleh karena itu, bagian $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pada komponen x dalam Persamaan momentum (4.11) dapat diabaikan, tetapi tidak untuk bagian $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Karena jika kedua bentuk dihilangkan Persamaan (4.11) akan menjadi persamaan momentum aliran *inviscid*. Bagian yang tersisa pada persamaan momentum berubah menjadi $O(1)$, sehingga

$$O\left(\frac{v}{U_\infty L} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right) = O(1)$$

dimana δ didefinisikan sebagai

$$\delta = \left(\frac{vL}{U_\infty}\right)^2$$

untuk komponen y pada Persamaan momentum (4.12) menjadi,

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

sehingga besaran untuk masing-masing bentuk direpresentasikan, sebagai

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} &= O\left(U_\infty \frac{U_\infty \delta}{L^2}\right), v \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\left(\frac{U_\infty \delta}{L}\right)^2 \frac{1}{\delta}\right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\rho U_\infty^2}{L}\right), v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O\left(v \frac{U_\infty \delta}{L} \frac{1}{L^2}\right) \\ \text{dan } v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= O\left(v \frac{U_\infty \delta}{L} \frac{1}{\delta^2}\right) \end{aligned}$$

bentuk diatas dikalikan dengan dengan $\frac{\delta}{U_\infty^2}$, kemudian didapat:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} &= O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right), v \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right), \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O(1), \\ v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= O\left(\frac{v \delta^2}{U_\infty L^3}\right) \text{ dan } v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\frac{v}{U_\infty L}\right) \end{aligned}$$

Karena δ, v, L , dan bilangan Reynold $Re = \frac{U_\infty L}{v}$, mendekati tak hingga $Re \rightarrow \infty$. (catatan dalam lapisan batas selalu bernilai valid ketika $Re \rightarrow \infty$), oleh karena itu semua bagian kecuali bagian tekanan (p) bisa diabaikan karena bernilai sangat kecil.

Persamaan energi (4.10) dapat ditulis sebagai

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

sehingga besaran untuk masing-masing bentuk direpresentasikan, sebagai

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = O \left(U_{\infty} \frac{T_{\infty}}{L} \right), v \frac{\partial T}{\partial y} = O \left(\frac{U_{\infty} \delta T_{\infty}}{L \delta} \right),$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = O \left(\alpha \frac{T_{\infty}}{L^2} \right), \text{ dan } \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = O \left(\alpha \frac{T_{\infty}}{\delta^2} \right)$$

bentuk diatas dikalikan dengan dengan $\frac{L}{U_{\infty} T_{\infty}}$, kemudian didapat

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = O(1), v \frac{\partial T}{\partial y} = O(1), \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = O \left(\frac{\alpha}{U_{\infty} L} \right) \text{ dan}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = O \left(\frac{\alpha L}{U_{\infty} \delta^2} \right)$$

Seperti sebelumnya, salah satu dari bagian pada ruas kanan persamaan energi akan dieliminasi sedemikian hingga, sehingga ukurannya menjadi lebih kecil daripada yang lain. Perbandingannya dapat dibentuk dengan mengikuti perbandingan:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} / \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = O \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 / 1$$

sehingga bagian $\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ pada Persamaan energi (4.13) bisa diabaikan, tapi tidak pada bagian $\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.

dengan pendekatan lapisan batas Persamaan (4.10)-(4.13) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.14)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.15)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.16)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.17)$$

Dari Persamaan (4.16) jelas bahwa tekanan p konstan dalam arah y . p hanya bervariasi dengan x yang mana $p = p(x)$. Karena p konstan dalam arah y , maka distribusi tekanan dalam lapisan batas sama dengan distribusi tekanan bagian luar lapisan batas bernilai sama dengan x . Sehingga bentuk $\frac{\partial p}{\partial x}$ dalam Persamaan (4.15) dapat ditulis dalam bentuk diferensial biasa, dan menjadi

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.18)$$

Karena tekanan p tidak bergantung pada y dalam lapisan batas pada Persamaan (4.16) dalam Tugas Akhir ini, distribusi tekanan sepanjang lapisan batas sama dengan distribusi tekanan pada lapisan batas bagian luar, Persamaan Bernoulli ditentukan oleh:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = \text{constant} \quad (4.19)$$

Persamaan (4.16) diturunkan terhadap x , menjadi

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} + U \frac{dU}{d\rho} = 0 \quad (4.20)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} = U \frac{dU}{d\rho} \quad (4.21)$$

dengan substitusi Persamaan (4.21) ke Persamaan (4.18), menjadi

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{d\rho} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.22)$$

4.2 Persamaan *Dimensional*

Berdasarkan pada bab sebelumnya mengenai penurunan persamaan, maka diperoleh persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi untuk aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik stagnasi sebagai berikut:

Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.23)$$

Persamaan momentum

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.24)$$

Persamaan energi

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.25)$$

dengan kondisi batas sebagai berikut [2] dan [16]:

$$\begin{aligned} u &= u_w(x), v = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) &= h_f (T_f - T(x, 0)), y = 0 \\ u &= u_e(x), T \rightarrow T_\infty \text{ ketika } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.3 Persamaan Similaritas

Penyelesaian dari persamaan pembangun *dimensional* adalah dengan mentransformasikan ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa dengan persamaan similaritas, yakni mensubstitusikan variabel similaritas. Pada dinamika fluida, persamaan similaritas merupakan bentuk solusi dimana mengubah beberapa koordinat menjadi satu koordinat yang sama tanpa mengubah bentuk asli dari koordinat tersebut. Pada permasalahan ini, digunakan variabel similaritas sebagai berikut [16]:

$$\eta = \left(\frac{u_e}{vx} \right)^{1/2} y, \psi = (vxu_e)^{1/2} f(\eta)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \theta(\eta) = \theta, f(\eta) = f, u_e(x) = ax \quad (4.27)$$

dengan ψ adalah fungsi alir (*stream function*) yang digunakan untuk mendefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.28)$$

sehingga didapat,

$$u = axf'(\eta), v = -(av)^{1/2}f(\eta) \quad (4.29)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.27), (4.2), dan (4.29) kedalam Persamaan pembangun (4.23), (4.24), dan (4.25) diperoleh persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' = 0 \quad (4.31)$$

dimana $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ adalah bilangan Prandtl dan $Re_x = \frac{u_e(x)}{\nu}$ adalah bilangan Reynold. Sehingga kondisi batas (4.26) menjadi:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, f'(0) = \varepsilon, \theta'(0) = -\gamma[1 - \theta(0)] \\ f'(\eta) &\rightarrow 1, \theta(\eta) \rightarrow 0 \text{ ketika } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.32)$$

dengan ' menunjukkan turunan terhadap η , dimana $\varepsilon = \frac{b}{a} \geq 0$ adalah parameter peregangan atau perbandingan antara kecepatan pada permukaan plat dengan kecepatan dari luar, $\gamma = h_f \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{1/2} K^{-1}$ adalah parameter konveksi untuk kondisi batas konveksi.

4.4 Penyelesaian Numerik

Sebelumnya sistem yang dari Persamaan (4.30) dan (4.31), diubah ke bentuk persamaan diferensial biasa orde 1, dengan memisalkan variabel baru:

$$f' = p \quad (4.33)$$

$$p' = q \quad (4.34)$$

$$\theta' = r \quad (4.35)$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (4.33) dan (4.34) ke Persamaan (4.30), dan juga substitusikan Persamaan (4.35) ke Persamaan (4.31), sehingga didapat:

$$\begin{aligned} q' + fq + 1 - p^2 &= 0 \\ q' &= p^2 - fq - 1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{r'}{Pr} + fr &= 0 \\ r' &= -fr Pr \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sehingga kondisi awal menjadi:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & p(0) &= \varepsilon, & q(0) &= \alpha_1, & \theta(0) &= \alpha_2 \\ r(0) &= -\gamma[1 - \alpha_2] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Penyelesaian persamaan pembangun pada Tugas Akhir ini diselesaikan dengan penyelesaian numerik. Metode numerik yang digunakan adalah Runge-Kutta-Fehlberg. Metode Runge Kutta-Fehlberg adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa (PDB) orde 1. Metode Runge-Kutta-Fehlberg digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (4.33) sampai (4.37). Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h , h adalah langkah waktu (*step size*). Persamaan *state* (4.33) sampai (4.37). Karena pada persamaan *state* adalah persamaan dengan yang diketahui adalah nilai awal maka untuk menyelesaikan persamaan *state* digunakan metode *forward sweep* karena nilai awal *state* diketahui [4].

Berikut langkah-langkah metode *forward sweep*:

1. Langkah pertama

Inisiasi nilai f , p , q , θ , r dalam bentuk vektor nol sebanyak n elemen

2. Langkah kedua

Memberikan nilai pada parameter yang terdapat di kondisi awal (4.38)

3. Langkah ketiga

Persamaan *state* diselesaikan secara *forward sweep*.

Integrasi numerik dari persamaan *state* (Persamaan (4.33) sampai (4.37)) dengan menggunakan Runge-Kutta-Fehlberg dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f_{i+1} = f_i + \left(\frac{25}{216} k_{1,f} + \frac{1408}{2565} k_{3,f} + \frac{2197}{4104} k_{4,f} - \frac{1}{5} k_{5,f} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1} = f_i + & \left(\frac{16}{135} k_{1,f} + \frac{6656}{12825} k_{3,f} + \frac{28561}{56430} k_{4,f} - \frac{9}{50} k_{5,f} \right. \\ & \left. + \frac{2}{55} k_{6,f} \right) \end{aligned}$$

$$R_f = \frac{1}{h} |\tilde{f}_{i+1} - f_{i+1}|$$

$$p_{i+1} = p_i + \left(\frac{25}{216} k_{1,p} + \frac{1408}{2565} k_{3,p} + \frac{2197}{4104} k_{4,p} - \frac{1}{5} k_{5,p} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i+1} = p_i + & \left(\frac{16}{135} k_{1,p} + \frac{6656}{12825} k_{3,p} + \frac{28561}{56430} k_{4,p} - \frac{9}{50} k_{5,p} \right. \\ & \left. + \frac{2}{55} k_{6,p} \right) \end{aligned}$$

$$R_p = \frac{1}{h} |\tilde{p}_{i+1} - p_{i+1}|$$

$$q_{i+1} = q_i + \left(\frac{25}{216} k_{1,q} + \frac{1408}{2565} k_{3,q} + \frac{2197}{4104} k_{4,q} - \frac{1}{5} k_{5,q} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{i+1} = q_i + & \left(\frac{16}{135} k_{1,q} + \frac{6656}{12825} k_{3,q} + \frac{28561}{56430} k_{4,q} - \frac{9}{50} k_{5,q} \right. \\ & \left. + \frac{2}{55} k_{6,q} \right) \end{aligned}$$

$$R_q = \frac{1}{h} |\tilde{q}_{i+1} - q_{i+1}|$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \left(\frac{25}{216} k_{1,\theta} + \frac{1408}{2565} k_{3,\theta} + \frac{2197}{4104} k_{4,\theta} - \frac{1}{5} k_{5,\theta} \right)$$

$$\tilde{\theta}_{i+1} = \theta_i + \left(\frac{16}{135} k_{1,\theta} + \frac{6656}{12825} k_{3,\theta} + \frac{28561}{56430} k_{4,\theta} - \frac{9}{50} k_{5,\theta} + \frac{2}{55} k_{6,\theta} \right)$$

$$R_\theta = \frac{1}{h} |\tilde{\theta}_{i+1} - \theta_{i+1}|$$

$$r_{i+1} = r_i + \left(\frac{25}{216} k_{1,r} + \frac{1408}{2565} k_{3,r} + \frac{2197}{4104} k_{4,r} - \frac{1}{5} k_{5,r} \right)$$

$$\tilde{r}_{i+1} = r_i + \left(\frac{16}{135} k_{1,r} + \frac{6656}{12825} k_{3,r} + \frac{28561}{56430} k_{4,r} - \frac{9}{50} k_{5,r} + \frac{2}{55} k_{6,r} \right)$$

$$R_r = \frac{1}{h} |\tilde{r}_{i+1} - r_{i+1}|$$

dengan,

$$k_{1,f} = hf(f, \quad p, \quad q, \quad \theta, \quad r)$$

$$k_{2,f} = hf\left(f + \frac{k_{1,f}}{4}, p + \frac{k_{1,p}}{4}, q + \frac{k_{1,q}}{4}, \theta + \frac{k_{1,\theta}}{4}, r + \frac{k_{1,r}}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
k_{3,f} = hf \Big(& f + \frac{3}{32}k_{1,f} + \frac{9}{32}k_{2,f}, p + \frac{3}{32}k_{1,p} + \frac{9}{32}k_{2,p}, q \\
& + \frac{3}{32}k_{1,q} + \frac{9}{32}k_{2,q}, \theta + \frac{3}{32}k_{1,\theta} + \frac{9}{32}k_{2,\theta}, r \\
& + \frac{3}{32}k_{1,r} + \frac{9}{32}k_{2,r} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,f} = hf \Big(& f + \frac{1932}{2197}k_{1,f} - \frac{7200}{2197}k_{2,f} + \frac{7296}{2197}k_{3,f}, p \\
& + \frac{1932}{2197}k_{1,p} - \frac{7200}{2197}k_{2,p} + \frac{7296}{2197}k_{3,p}, q \\
& + \frac{1932}{2197}k_{1,q} - \frac{7200}{2197}k_{2,q} + \frac{7296}{2197}k_{3,q}, \theta \\
& + \frac{1932}{2197}k_{1,\theta} - \frac{7200}{2197}k_{2,\theta} + \frac{7296}{2197}k_{3,\theta}, r \\
& + \frac{1932}{2197}k_{1,r} - \frac{7200}{2197}k_{2,r} + \frac{7296}{2197}k_{3,r} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{5,f} = hf \Big(& f + \frac{439}{216}k_{1,f} - 8k_{2,f} + \frac{3680}{513}k_{3,f} - \frac{845}{4104}k_{4,f}, p \\
& + \frac{439}{216}k_{1,p} - 8k_{2,p} + \frac{3680}{513}k_{3,p} - \frac{845}{4104}k_{4,p}, q \\
& + \frac{439}{216}k_{1,q} - 8k_{2,q} + \frac{3680}{513}k_{3,q} - \frac{845}{4104}k_{4,q}, \theta \\
& + \frac{439}{216}k_{1,\theta} - 8k_{2,\theta} + \frac{3680}{513}k_{3,\theta} - \frac{845}{4104}k_{4,\theta}, r \\
& + \frac{439}{216}k_{1,r} - 8k_{2,r} + \frac{3680}{513}k_{3,r} - \frac{845}{4104}k_{4,r} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{6,f} = hf \Big(& f - \frac{8}{27}k_{1,f} + 2k_{2,f} + \frac{3544}{2565}k_{3,f} + \frac{1859}{4104}k_{4,f} \\
& + \frac{11}{40}k_{5,f,p} - \frac{8}{27}k_{1,p} + 2k_{2,p} + \frac{3544}{2565}k_{3,p} \\
& + \frac{1859}{4104}k_{4,p} + \frac{11}{40}k_{5,p,q} - \frac{8}{27}k_{1,q} + 2k_{2,q} \\
& + \frac{3544}{2565}k_{3,q} + \frac{1859}{4104}k_{4,q} + \frac{11}{40}k_{5,q,\theta} - \frac{8}{27}k_{1,\theta} \\
& + 2k_{2,\theta} + \frac{3544}{2565}k_{3,\theta} + \frac{1859}{4104}k_{4,\theta} + \frac{11}{40}k_{5,\theta,r} \\
& - \frac{8}{27}k_{1,r} + 2k_{2,r} + \frac{3544}{2565}k_{3,r} + \frac{1859}{4104}k_{4,r} \\
& + \frac{11}{40}k_{5,r} \Big)
\end{aligned}$$

$k_{1,p}, k_{2,p}, k_{3,p}, k_{4,p}, k_{5,p}, k_{6,p}, k_{1,q}, k_{2,q}, k_{3,q}, k_{4,q}, k_{5,q}, k_{6,q},$
 $k_{1,\theta}, k_{2,\theta}, k_{3,\theta}, k_{4,\theta}, k_{5,\theta}, k_{6,\theta}, k_{1,r}, k_{2,r}, k_{3,r}, k_{4,r}, k_{5,r},$ dan $k_{6,r}$
 didapat dengan cara yang sama

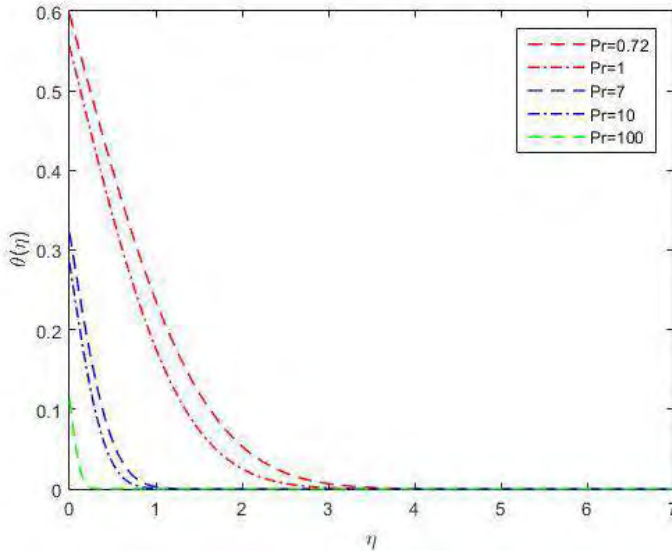
4.5 Analisis Hasil Simulasi

Setelah dilakukan tahapan penyelesaian numerik maka dilakukan simulasi dengan menggunakan Matlab. Pada simulasi ini dilakukan percobaan variasi dari beberapa parameter yang ada dan yang ditampilkan pada bab ini beberapa yang mewakili dari percobaan simulasi yang dilakukan. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, diperoleh hubungan antara bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ) terhadap profil kecepatan (f) dan profil temperatur (θ). Simulasi ini menggunakan partisi η sebanyak 7 dengan $\Delta\eta = 0.02$. Uraian dari masing-masing pengaruh parameter tersebut adalah sebagai berikut :

4.5.1 Pengaruh Bilangan Prandtl (Pr)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari bilangan Prandtl (Pr) terhadap profil temperatur pada fluida yang *viscous*. Pada simulasi ini digunakan variasi bilangan Prandtl yaitu $Pr = 0.72; 1; 7; 10; 100$ dengan menggunakan parameter tetap yaitu parameter konveksi (γ) dan parameter peregangan (ε) dengan nilai $\gamma = 1$ dan $\varepsilon = 1$. Pemilihan variasi bilangan Prandtl dapat dilakukan untuk nilai $0.7 \leq Pr \leq 100$ dimana $Pr = 0.7$ yang berarti gas dan $Pr = 7$ yang berarti air [15].

Pada Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan. Hal ini disebabkan karena semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka difusitas panas semakin menurun. Difusitas panas yang semakin menurun ini yang menyebabkan temperatur fluida juga menurun seiring meningkatnya bilangan Prandtl karena panas akan didifusikan dari permukaan benda lebih cepat dibandingkan dengan fluida. Sehingga didapat untuk fluida yang lebih kental atau rapat jenisnya semakin besar maka temperatur pada fluida tersebut semakin besar seperti fluida dengan kekentalan seperti minyak memiliki temperatur lebih besar dari fluida dengan kekentalan seperti cairan organik, kemudian fluida dengan kekentalan seperti air dan gas.



Gambar 4.1 Profil Temperatur Variasi Bilangan Prandtl

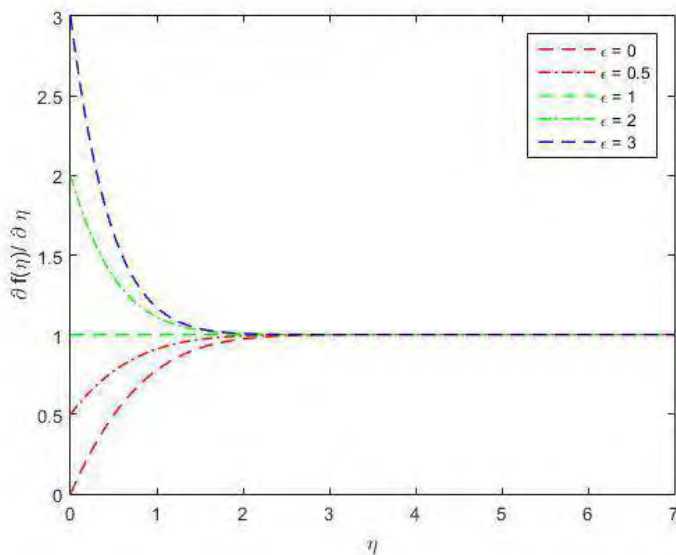
4.5.2 Pengaruh Parameter Peregangan (ε)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari parameter peregangan (ε) terhadap profil kecepatan $f'(\eta)$ dan profil temperatur pada fluida *viscous* yang dapat dilihat pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 Pada simulasi ini digunakan variasi parameter Peregangan $\varepsilon = 0; 0.5; 1; 2; 3$, pemilihan variasi parameter peregangan dapat dilakukan untuk nilai $\varepsilon = \frac{b}{a} \geq 0$ karena a, b adalah konstanta positif pada komponen kecepatan sumbu x .

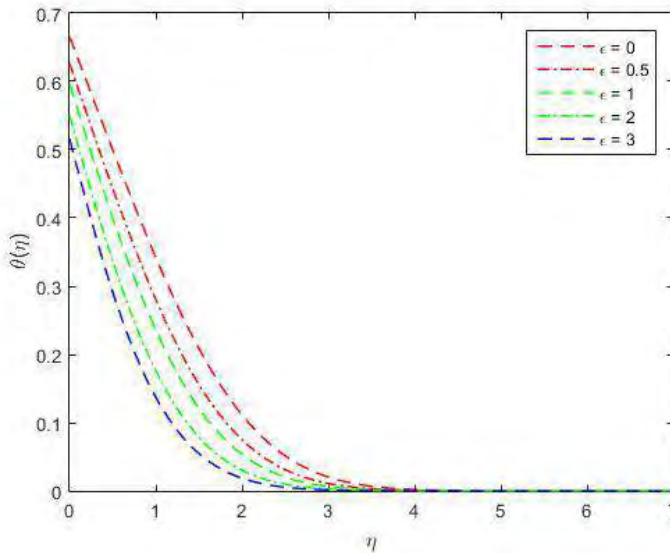
Pada Gambar 4.2 menunjukkan grafik pengaruh parameter peregangan terhadap profil kecepatan. Pada grafik terlihat bahwa $f'(0) = \varepsilon$ dan $f'(\eta) \rightarrow 1$ ketika $\eta \rightarrow \infty$. Ketika kecepatan pada permukaan plat lebih besar daripada kecepatan dari luar maka semakin menurun profil kecepatan yang dihasilkan, sedangkan

ketika kecepatan pada permukaan plat lebih kecil daripada kecepatan dari luar semakin meningkat profil kecepatan yang dihasilkan.

Untuk grafik pengaruh parameter peregangan terhadap profil temperatur dapat dilihat pada Gambar 4.3 bahwa semakin meningkatnya parameter peregangan maka semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan. Hal ini sama seperti grafik pada Gambar 4.1



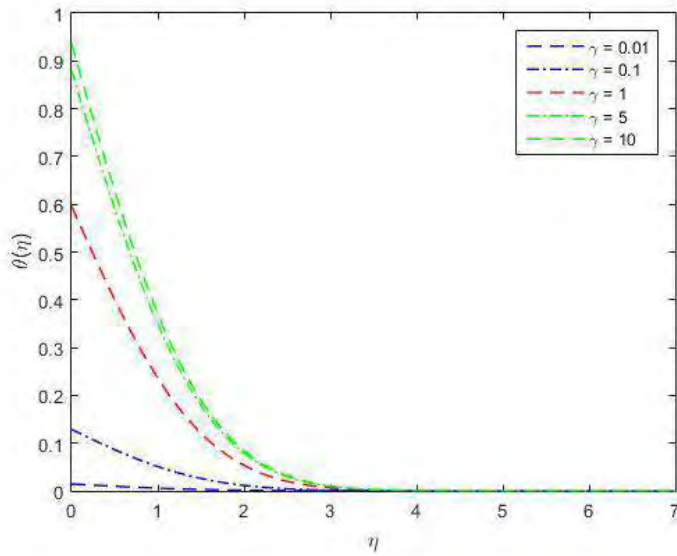
Gambar 4.2 Profil Kecepatan Variasi Parameter Peregangan



Gambar 4.3 Profil Temperatur Variasi Parameter Peregangan

4.5.3 Pengaruh Parameter Konveksi (γ)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari parameter konveksi (γ) terhadap profil temperatur pada fluida *viscous* yang dapat dilihat pada Gambar 4.4 Pada simulasi ini digunakan variasi parameter Peregangan $\gamma = 0.01; 0.1; 1; 5; 10$ dengan menggunakan parameter tetap yaitu parameter peregangan (ε) dan bilangan Prandtl (Pr) dengan nilai $\varepsilon = 1$ dan $Pr = 100$ karena fluida bersifat *viscous* yang memiliki kekentalan seperti minyak [15]. Pada Gambar 4.4 bahwa semakin meningkatnya paramater konveksi maka semakin meningkat juga temperatur fluida yang dihasilkan. Hal ini berdeda dengan hasil yang diberikan pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.3 Variasi Bilangan Prandtl dan Variasi Parameter Peregangan.



Gambar 4.4 Profil Temperatur Variasi Parameter Konveksi

LAMPIRAN

Lampiran 1. Penjabaran Persamaan Pembangun

Diperoleh persamaan pembangun dari Persamaan (4.1)-(4.4) sebagai berikut:

persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

persamaan momentum:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \underline{F}$$

persamaan energi:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

dengan

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j},$$

$$\underline{u} = u \hat{i} + v \hat{j},$$

$$\underline{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

sehingga,

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) (u \hat{i} + v \hat{j}) \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

persamaan momentum:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \underline{F}$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\underline{u}}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (u\hat{i} + v\hat{j}) \\ &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u\hat{i} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v\hat{j} \\ &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{i} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned} -\nabla p &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) p \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \underline{u} &= \mu \left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \right) (u\hat{i} + v\hat{j}) \right) \\ &= \mu \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u\hat{i} + v\hat{j}) \right) \\ &= \mu \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u\hat{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v\hat{j} \right) \\ &= \mu \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \underline{F} \\
& = -\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j} + F_x \hat{i} + F_y \hat{j}
\end{aligned}$$

sehingga persamaan momentum untuk sumbu x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x$$

sumbu y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y$$

Persamaan energi:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

Ruas kiri

$$\begin{aligned}
\rho C_p \frac{DT}{Dt} &= \rho C_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) T \right) \\
&= \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}
k \nabla^2 T &= k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) T \right) \\
&= k \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T \right) \\
&= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Lampiran 2. Penjabaran Persamaan Similaritas

Diperoleh persamaan pembangun dari Persamaan (4.23)-(4.25) sebagai berikut:

Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Persamaan momentum

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Persamaan energi

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

persamaan pembangun *dimensional* tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa dengan persamaan similaritas. Diberikan variabel similaritas [2] sebagai berikut:

$$\eta = \left(\frac{u_e}{vx} \right)^{1/2} y, \psi = (vxu_e)^{1/2} f(\eta)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \theta(\eta) = \theta, f(\eta) = f, u_e(x) = ax$$

dengan ψ adalah fungsi alir (*stream function*) yang digunakan untuk mendefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= (vxu_e)^{1/2} f'(\eta) \cdot \left(\frac{u_e}{vx} \right)^{1/2} \\ &= u_e f'(\eta) \end{aligned}$$

$$= axf'(\eta)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{vu_e}{x} \right)^{1/2} f(\eta) \\ &= -(av)^{1/2} f(\eta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = af'(\eta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= -(av)^{1/2} f'(\eta) \cdot \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \\ &= -af'(\eta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = axf''(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(axf''(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(axf''(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= axf'''(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \\ &= \frac{a^2 x}{v} f'''(\eta) \end{aligned}$$

Persamaan kontinuitas

Perhitungan untuk persamaan kontinuitas dengan mensubstitusikan variabel similaritas adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ af'(\eta) + (-af'(\eta)) &= 0 \\ af'(\eta) &= af'(\eta)\end{aligned}$$

pada penyederhanaan tersebut, persamaan kontinuitas bernilai nol sehingga dapat dihilangkan

Persamaan Momentum

Perhitungan untuk persamaan momentum dengan mensubstitusikan variabel similaritas adalah

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

perhitungan ruas kiri:

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= axf'(\eta)af'(\eta) - (av)^{1/2}f(\eta)axf''(\eta) \left(\frac{a}{v}\right)^{1/2} \\ &= a^2x(f'(\eta))^2 - a^2xf(\eta)f''(\eta)\end{aligned}$$

perhitungan ruas kanan:

$$\begin{aligned}u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= ax \frac{d(ax)}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= a^2x + v \frac{a^2x}{v} f'''(\eta) \\ &= a^2x + a^2xf'''(\eta)\end{aligned}$$

sehingga didapatkan penyederhanaan dari kedua ruas sebagai berikut:

$$a^2x(f'(\eta))^2 - a^2xf(\eta)f''(\eta) = a^2x + a^2xf'''(\eta)$$

kedua dikali dengan $1/a^2x$, maka dapat ditulis:

$$f'^2 - ff'' = 1 + f'''$$

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0$$

Persamaan Energi

Perhitungan untuk persamaan energi dengan mensubstitusikan variabel similaritas adalah

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

perhitungan ruas kiri:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha x f'(\eta) \frac{\partial(\theta(\eta)(T_f - T_\infty) + T_\infty)}{\partial x} - (av)^{1/2} f(\eta) \frac{\partial(\theta(\eta)(T_f - T_\infty) + T_\infty)}{\partial y} \end{aligned}$$

karena T_f dan T_∞ adalah konstan maka didapat:

$$= (T_f - T_\infty) \left(\alpha x f'(\eta) \frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial x} - (av)^{1/2} f(\eta) \frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial y} \right)$$

karena $\frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial x} = \frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ maka didapat:

$$\begin{aligned} &= (T_f - T_\infty) \left(-(av)^{1/2} f(\eta) \frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial y} \right) \\ &= (T_f - T_\infty) \left(-(av)^{1/2} f(\eta) \frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= (T_f - T_\infty) \left(-(av)^{1/2} f(\eta) \theta'(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \right) \\ &= (T_f - T_\infty) (-af(\eta)\theta'(\eta)) \end{aligned}$$

perhitungan ruas kanan:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial(\theta(\eta)(T_f - T_\infty) + T_\infty)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T_f - T_\infty) \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial(\theta(\eta))}{\partial y} \right) \\
&= (T_f - T_\infty) \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta'(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \right) \\
&= (T_f - T_\infty) \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\theta'(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= (T_f - T_\infty) \alpha \theta''(\eta) \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{v} \right)^{1/2} \\
&= (T_f - T_\infty) a \frac{\alpha}{v} \theta''(\eta)
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan penyederhanaan dari kedua ruas sebagai berikut:

$$(T_f - T_\infty)(-af(\eta)\theta'(\eta)) = (T_f - T_\infty) \left(a \frac{\alpha}{v} \theta''(\eta) \right)$$

kedua dikali dengan $\frac{1}{a(T_f - T_\infty)}$ dan $Pr = \frac{v}{\alpha}$, maka dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
-f(\eta)\theta'(\eta) &= \frac{1}{Pr} \theta''(\eta) \\
\frac{1}{Pr} \theta''(\eta) + f(\eta)\theta'(\eta) &= 0 \\
\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' &= 0
\end{aligned}$$

Sehingga didapat persamaan diferensial biasa (PDB) dari persamaan pembangun:

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' = 0$$

dengan ' menunjukkan turunan terhadap η

Lampiran 3. Program Simulasi pada Matlab

```
function Runge_Kutta_Fehlberg
    clc;
    clear;
    format long;
    n1 = 0;
    n2 = 7;
    hmax = 0.02;
    hmin = 0.0001;
    tol = 0.000001;
    n(1) = n1;
    h = hmax;
    FLAG = 1;
    %parameter
    eps=3;
    alfa1=-4.27655;
    alfa2=0.5963;
    gamma=1;
    %initial conditions
    w1(1) = 0;
    w2(1) = eps;
    w3(1) = alfa1;
    w4(1) = alfa2;
    w5(1) = -gamma*(1-alfa2);

    i = 1;
    while FLAG == 1
        %step1
        k11 = h * f1(n(i), w1(i), w2(i), w3(i),
w4(i), w5(i));
        k12 = h * f2(n(i), w1(i), w2(i), w3(i),
w4(i), w5(i));
        k13 = h * f3(n(i), w1(i), w2(i), w3(i),
w4(i), w5(i));
        k14 = h * f4(n(i), w1(i), w2(i), w3(i),
w4(i), w5(i));
        k15 = h * f5(n(i), w1(i), w2(i), w3(i),
w4(i), w5(i));
```



```

    %step2
        k21 = h * f1(n(i)+h/4, w1(i)+k11/4,
w2(i)+k12/4, w3(i)+k13/4, w4(i)+k14/4,
w5(i)+k15/4);
        k22 = h * f2(n(i)+h/4, w1(i)+k11/4,
w2(i)+k12/4, w3(i)+k13/4, w4(i)+k14/4,
w5(i)+k15/4);
        k23 = h * f3(n(i)+h/4, w1(i)+k11/4,
w2(i)+k12/4, w3(i)+k13/4, w4(i)+k14/4,
w5(i)+k15/4);
        k24 = h * f4(n(i)+h/4, w1(i)+k11/4,
w2(i)+k12/4, w3(i)+k13/4, w4(i)+k14/4,
w5(i)+k15/4);
        k25 = h * f5(n(i)+h/4, w1(i)+k11/4,
w2(i)+k12/4, w3(i)+k13/4, w4(i)+k14/4,
w5(i)+k15/4);
    %step3
        k31 = h * f1(n(i)+3*h/8,
w1(i)+3*k11/32+9*k21/32,
w2(i)+3*k12/32+9*k22/32,
w3(i)+3*k13/32+9*k23/32, w4(i)+3*k14/32+9*k24/32
...

, w5(i)+3*k15/32+9*k25/32);
        k32 = h * f2(n(i)+3*h/8,
w1(i)+3*k11/32+9*k21/32,
w2(i)+3*k12/32+9*k22/32,
w3(i)+3*k13/32+9*k23/32, w4(i)+3*k14/32+9*k24/32
...

, w5(i)+3*k15/32+9*k25/32);
        k33 = h * f3(n(i)+3*h/8,
w1(i)+3*k11/32+9*k21/32,
w2(i)+3*k12/32+9*k22/32,
w3(i)+3*k13/32+9*k23/32, w4(i)+3*k14/32+9*k24/32
...

, w5(i)+3*k15/32+9*k25/32);
        k34 = h * f4(n(i)+3*h/8,
w1(i)+3*k11/32+9*k21/32,

```

```

w2(i)+3*k12/32+9*k22/32,
w3(i)+3*k13/32+9*k23/32, w4(i)+3*k14/32+9*k24/32
...

, w5(i)+3*k15/32+9*k25/32);
      k35 = h * f5(n(i)+3*h/8,
w1(i)+3*k11/32+9*k21/32,
w2(i)+3*k12/32+9*k22/32,
w3(i)+3*k13/32+9*k23/32, w4(i)+3*k14/32+9*k24/32
...

, w5(i)+3*k15/32+9*k25/32);
      %step4
      k41 = h * f1(n(i)+12*h/13, w1(i) +
1932*k11/2197 - 7200*k21/2197 + 7296*k31/2197,
w2(i) + 1932*k12/2197 - 7200*k22/2197 +
7296*k32/2197 ...
                                     , w3(i) +
1932*k13/2197 - 7200*k23/2197 + 7296*k33/2197,
w4(i) + 1932*k14/2197 - 7200*k24/2197 +
7296*k34/2197 ...
                                     , w5(i) +
1932*k15/2197 - 7200*k25/2197 + 7296*k35/2197);
      k42 = h * f2(n(i)+12*h/13, w1(i) +
1932*k11/2197 - 7200*k21/2197 + 7296*k31/2197,
w2(i) + 1932*k12/2197 - 7200*k22/2197 +
7296*k32/2197 ...
                                     , w3(i) +
1932*k13/2197 - 7200*k23/2197 + 7296*k33/2197,
w4(i) + 1932*k14/2197 - 7200*k24/2197 +
7296*k34/2197 ...
                                     , w5(i) +
1932*k15/2197 - 7200*k25/2197 + 7296*k35/2197);
      k43 = h * f3(n(i)+12*h/13, w1(i) +
1932*k11/2197 - 7200*k21/2197 + 7296*k31/2197,
w2(i) + 1932*k12/2197 - 7200*k22/2197 +
7296*k32/2197 ...
                                     , w3(i) +
1932*k13/2197 - 7200*k23/2197 + 7296*k33/2197,

```

```

w4(i) + 1932*k14/2197 - 7200*k24/2197 +
7296*k34/2197 ...
                                , w5(i) +
1932*k15/2197 - 7200*k25/2197 + 7296*k35/2197);
    k44 = h * f4(n(i)+12*h/13, w1(i) +
1932*k11/2197 - 7200*k21/2197 + 7296*k31/2197,
w2(i) + 1932*k12/2197 - 7200*k22/2197 +
7296*k32/2197 ...
                                , w3(i) +
1932*k13/2197 - 7200*k23/2197 + 7296*k33/2197,
w4(i) + 1932*k14/2197 - 7200*k24/2197 +
7296*k34/2197 ...
                                , w5(i) +
1932*k15/2197 - 7200*k25/2197 + 7296*k35/2197);
    %step5
    k51 = h * f1(n(i)+h, w1(i) + 439*k11/216
- 8*k21 + 3680*k31/513 - 845*k41/4104, w2(i) +
439*k12/216 - 8*k22 + 3680*k32/513 -
845*k42/4104 ...
                                , w3(i) +
439*k13/216 - 8*k23 + 3680*k33/513 -
845*k43/4104, w4(i) + 439*k14/216 - 8*k24 +
3680*k34/513 - 845*k44/4104 ...
                                , w5(i) +
439*k15/216 - 8*k25 + 3680*k35/513 -
845*k45/4104);

    k52 = h * f2(n(i)+h, w1(i) + 439*k11/216
- 8*k21 + 3680*k31/513 - 845*k41/4104, w2(i) +

```

```

439*k12/216 - 8*k22 + 3680*k32/513 -
845*k42/4104 ...
                                , w3(i) +
439*k13/216 - 8*k23 + 3680*k33/513 -
845*k43/4104, w4(i) + 439*k14/216 - 8*k24 +
3680*k34/513 - 845*k44/4104 ...
                                , w5(i) +
439*k15/216 - 8*k25 + 3680*k35/513 -
845*k45/4104);

      k53 = h * f3(n(i)+h, w1(i) + 439*k11/216
- 8*k21 + 3680*k31/513 - 845*k41/4104, w2(i) +
439*k12/216 - 8*k22 + 3680*k32/513 -
845*k42/4104 ...
                                , w3(i) +
439*k13/216 - 8*k23 + 3680*k33/513 -
845*k43/4104, w4(i) + 439*k14/216 - 8*k24 +
3680*k34/513 - 845*k44/4104 ...
                                , w5(i) +
439*k15/216 - 8*k25 + 3680*k35/513 -
845*k45/4104);

      k54 = h * f4(n(i)+h, w1(i) + 439*k11/216
- 8*k21 + 3680*k31/513 - 845*k41/4104, w2(i) +
439*k12/216 - 8*k22 + 3680*k32/513 -
845*k42/4104 ...
                                , w3(i) +
439*k13/216 - 8*k23 + 3680*k33/513 -
845*k43/4104, w4(i) + 439*k14/216 - 8*k24 +
3680*k34/513 - 845*k44/4104 ...
                                , w5(i) +
439*k15/216 - 8*k25 + 3680*k35/513 -
845*k45/4104);

      k55 = h * f5(n(i)+h, w1(i) + 439*k11/216
- 8*k21 + 3680*k31/513 - 845*k41/4104, w2(i) +
439*k12/216 - 8*k22 + 3680*k32/513 -
845*k42/4104 ...
                                , w3(i) +
439*k13/216 - 8*k23 + 3680*k33/513 -

```

```

845*k43/4104, w4(i) + 439*k14/216 - 8*k24 +
3680*k34/513 - 845*k44/4104 ...
, w5(i) +
439*k15/216 - 8*k25 + 3680*k35/513 -
845*k45/4104);
%step6
k61 = h * f1(n(i)+h/2, w1(i) - 8*k11/27
+ 2*k21 - 3544*k31/2565 + 1859*k41/4104 -
11*k51/40, w2(i) - 8*k12/27 + 2*k22 -
3544*k32/2565 + 1859*k42/4104 - 11*k52/40 ...
, w3(i) -
8*k13/27 + 2*k23 - 3544*k33/2565 + 1859*k43/4104
- 11*k53/40, w4(i) - 8*k14/27 + 2*k24 -
3544*k34/2565 + 1859*k44/4104 - 11*k54/40 ...
, w5(i) -
8*k15/27 + 2*k25 - 3544*k35/2565 + 1859*k45/4104
- 11*k55/40);

k62 = h * f2(n(i)+h/2, w1(i) - 8*k11/27
+ 2*k21 - 3544*k31/2565 + 1859*k41/4104 -
11*k51/40, w2(i) - 8*k12/27 + 2*k22 -
3544*k32/2565 + 1859*k42/4104 - 11*k52/40 ...
, w3(i) -
8*k13/27 + 2*k23 - 3544*k33/2565 + 1859*k43/4104
- 11*k53/40, w4(i) - 8*k14/27 + 2*k24 -
3544*k34/2565 + 1859*k44/4104 - 11*k54/40 ...
, w5(i) -
8*k15/27 + 2*k25 - 3544*k35/2565 + 1859*k45/4104
- 11*k55/40);

k63 = h * f3(n(i)+h/2, w1(i) - 8*k11/27
+ 2*k21 - 3544*k31/2565 + 1859*k41/4104 -
11*k51/40, w2(i) - 8*k12/27 + 2*k22 -
3544*k32/2565 + 1859*k42/4104 - 11*k52/40 ...
, w3(i) -
8*k13/27 + 2*k23 - 3544*k33/2565 + 1859*k43/4104
- 11*k53/40, w4(i) - 8*k14/27 + 2*k24 -
3544*k34/2565 + 1859*k44/4104 - 11*k54/40 ...

```

$$, w5(i) - 8*k15/27 + 2*k25 - 3544*k35/2565 + 1859*k45/4104 - 11*k55/40);$$

$$\begin{aligned} k64 = h * f4(n(i)+h/2, w1(i) - 8*k11/27 \\ + 2*k21 - 3544*k31/2565 + 1859*k41/4104 - \\ 11*k51/40, w2(i) - 8*k12/27 + 2*k22 - \\ 3544*k32/2565 + 1859*k42/4104 - 11*k52/40 \dots \\ , w3(i) - 8*k13/27 + 2*k23 - 3544*k33/2565 + 1859*k43/4104 \\ - 11*k53/40, w4(i) - 8*k14/27 + 2*k24 - \\ 3544*k34/2565 + 1859*k44/4104 - 11*k54/40 \dots \\ , w5(i) - 8*k15/27 + 2*k25 - 3544*k35/2565 + 1859*k45/4104 \\ - 11*k55/40); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k65 = h * f5(n(i)+h/2, w1(i) - 8*k11/27 \\ + 2*k21 - 3544*k31/2565 + 1859*k41/4104 - \\ 11*k51/40, w2(i) - 8*k12/27 + 2*k22 - \\ 3544*k32/2565 + 1859*k42/4104 - 11*k52/40 \dots \\ , w3(i) - 8*k13/27 + 2*k23 - 3544*k33/2565 + 1859*k43/4104 \\ - 11*k53/40, w4(i) - 8*k14/27 + 2*k24 - \\ 3544*k34/2565 + 1859*k44/4104 - 11*k54/40 \dots \\ , w5(i) - 8*k15/27 + 2*k25 - 3544*k35/2565 + 1859*k45/4104 \\ - 11*k55/40); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R1 = \text{abs}(k11/360 - 128*k31/4275 - \\ 2197*k41/75240 + k51/50 + 2*k61/55)/h; \\ R2 = \text{abs}(k12/360 - 128*k32/4275 - \\ 2197*k42/75240 + k52/50 + 2*k62/55)/h; \\ R3 = \text{abs}(k13/360 - 128*k33/4275 - \\ 2197*k43/75240 + k53/50 + 2*k63/55)/h; \\ R4 = \text{abs}(k14/360 - 128*k34/4275 - \\ 2197*k44/75240 + k54/50 + 2*k64/55)/h; \\ R5 = \text{abs}(k15/360 - 128*k35/4275 - \\ 2197*k45/75240 + k55/50 + 2*k65/55)/h; \end{aligned}$$

```

        if R1 <= tol || R2 <= tol || R3 <= tol
        || R4 <= tol || R5 <= tol
            n(i+1) = n(i) + h;

            w1(i+1) = w1(i) + 25*k11/216 +
1408*k31/2565 + 2197*k41/4104 - k51/5;
            w2(i+1) = w2(i) + 25*k12/216 +
1408*k32/2565 + 2197*k42/4104 - k52/5;
            w3(i+1) = w3(i) + 25*k13/216 +
1408*k33/2565 + 2197*k43/4104 - k53/5;
            w4(i+1) = w4(i) + 25*k14/216 +
1408*k34/2565 + 2197*k44/4104 - k54/5;
            w5(i+1) = w5(i) + 25*k15/216 +
1408*k35/2565 + 2197*k45/4104 - k55/5;

        else
            i = i-1;
        end

        delta = 0.84*((tol/max([R1 R2 R3 R4
R5]))^0.25);
        h1 = delta*h;
        if delta <= 0.1
            h1 = h/10;
        end
        if delta >= 4
            h1 = 4*h;
        end
        h = h1;

        if h > hmax
            h = hmax;
        end
        if n(i+1) >= n2
            FLAG = 0;
        elseif n(i+1)+h > n2
            h = n2-n(i+1);
        elseif h < hmin

```

```

        FLAG = 0;
    end
    i = i + 1;
end

fprintf('        Runge Kutta Fehlberg\n\n');
fprintf('\t\t\t n\t\t\t\t profil
kecepatan\t\t\t\t profil temperature\t\t');
[n' w2' w4']
end

function f = f1(n,w1,w2,w3,w4,w5)
    f = w2;
end

function f = f2(n,w1,w2,w3,w4,w5)
    f = w3;
end

function f = f3(n,w1,w2,w3,w4,w5)
    f = (w2)^2-1-w1*w3;
end

function f = f4(n,w1,w2,w3,w4,w5)
    f = w5;
end

function f = f5(n,w1,w2,w3,w4,w5)
    pr=0.72;
    f = -1*pr*(w1*w5);
end

```


BAB V

PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir ini dan saran jika penelitian pada Tugas Akhir ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang dilakukan di bab - bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model matematika aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik-stagnasi dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Pendekatan Boussinesq diterapkan pada persamaan pembangun, kemudian dilakukan transformasi ke dalam bentuk persamaan similaritas untuk mendapatkan model akhir aliran fluida pada permukaan peregangan dengan kondisi batas konveksi di titik-stagnasi dalam bentuk persamaan deferensial biasa (PDB) dengan Persamaan:

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0$$
$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' = 0$$

2. Pengaruh dari bilangan Prandtl (Pr), parameter peregangan (ε), dan parameter konveksi (γ) terhadap profil temperatur, berdasarkan grafik yang didapatkan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

- (a) Pengaruh bilangan Prandtl terhadap profil temperatur adalah semakin meningkatnya bilangan Prandtl mengakibatkan semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan. Hal ini disebabkan karena semakin

meningkatnya bilangan Prandtl maka difusitas panas semakin menurun. Difusitas panas yang semakin menurun ini yang menyebabkan temperatur fluida juga menurun seiring meningkatnya bilangan Prandtl karena panas akan didifusikan dari permukaan benda lebih cepat dibandingkan dengan fluida. Sehingga didapat untuk fluida yang lebih kental atau rapat jenisnya semakin besar maka temperatur pada fluida tersebut semakin besar seperti fluida dengan kekentalan seperti minyak memiliki temperatur lebih besar dari fluida dengan kekentalan seperti cairan organik, kemudian fluida dengan kekentalan seperti air dan gas..

- (b) Pengaruh parameter peregang terhadap profil kecepatan dibagi dua yaitu ketika kecepatan pada permukaan plat lebih besar daripada kecepatan dari luar maka semakin menurun profil kecepatan yang dihasilkan, sedangkan ketika kecepatan pada permukaan plat lebih kecil daripada kecepatan dari luar semakin meningkat profil kecepatan yang dihasilkan. Sedangkan pengaruh parameter peregang terhadap profil temperatur adalah semakin meningkatnya parameter peregang mengakibatkan semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan.
- (c) Pengaruh parameter konveksi terhadap profil temperatur adalah semakin meningkatnya parameter konveksi maka semakin meningkat juga temperatur fluida yang dihasilkan. Hal ini berbeda dengan hasil yang diberikan dari Pengaruh bilangan Prandtl, dan parameter peregang.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan dan penyelesaian permasalahan Tugas Akhir ini, saran diberikan untuk pengembangan selanjutnya yaitu mengasumsikan aliran fluida bersifat *unsteady* dan dapat digunakan *flux* panas tidak konstan sehingga ada perpindahan panas dari fluida ke benda.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ahmad, S. (2009). *Convection Boundary Layer Flows over Needles and Cylinders in Viscous Fluids*.
- [2] Aziz, A. (2008). A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition.
- [3] Bejan, A. (1984). *Convection Heat Transfer (second edition)*.
- [4] Burden, R.L., dan Faires, J.D. (2011). Numerical Analysis, 9th Edition.
- [5] Imron, C. (2013). Numerical Simulation of Fluid Flow Around Circular and I-Shape Cylinder in a Tandem Configuration
- [6] Ishak, A., Nazar, R., Arifin, N. M., dan Pop, I. (2007). Mixed convection of the stagnation-point flow towards a stretching vertical permeable sheet.
- [7] Ishak, A., Nazar, R., dan Pop, I (2008). Post-stagnation-point boundary layer flow and mixed convection heat transfer over a vertical, linearly stretching sheet.
- [8] Ishak, A., Jafar, K., Nazar, R., dan Pop, I (2009). MHD stagnation point flow towards a stretching sheet.
- [9] Kasim, A.R.M. (2014). Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid.
- [10] Munson, B.R., Young, D.F., dan Okiishi, T.H. (2002). Fourth Edition Fundamentals of Fluid Mechanics.
- [11] Ozisik, M. N. (1985). *Heat Transfer*.
- [12] Pop, I. and Ingham, D. B. (2001). *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Medium*
- [13] Potter, M.C., Wigget, D.C., dan Ramadan, B.H. (2008). Schaum's Outline Mekanika Fluida, Erlangga, Jakarta.
- [14] Potter, M.C., Wigget, D.C., dan Ramadan, B.H. (2012). Mechanics of Fluids Fourth Edition.

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Ahlan Hamami. Dilahirkan di Pasuruan pada tanggal 21 Januari 1994 dan merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara. Pendidikan formal yang telah ditempuh yaitu TK Dharma Wanita Persatuan 1, SDN Karangjati 2 Pandaan, SMPN 1 Pandaan, dan SMAN 1 Pandaan. Setelah menyelesaikan pendidikannya di SMAN 1 Pandaan, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika FMIPA ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2012. Pada masa perkuliahan penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya. Selama menjadi mahasiswa ITS penulis aktif mengikuti organisasi yaitu Himpunan Mahasiswa Matematika ITS sebagai *Staff* departemen Hubungan Luar pada periode 2013/2014, dan sebagai Kepala departemen Hubungan Luar pada periode 2014/2015. Selama penulisan Tugas Akhir ini, penulis tidak lepas dari kekurangan. Oleh karena itu, untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke ahlan.hamami@gmail.com.